Dipartimento di Matematica per le scienze economiche e sociali Università di Bologna

Matematica aa 2008-2009

lezione 25 17 marzo 2009

professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli

Convessità

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice:

Convessità

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice:

- **convessa** se per ogni $x_1, x_2 \in I$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:

$$f\left((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\right) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

Convessità

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice:

- **convessa** se per ogni $x_1, x_2 \in I$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:

$$f\left((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\right) \leq (1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

- **strettamente convessa** se per ogni $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:

$$f\left((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\right) < (1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2).$$

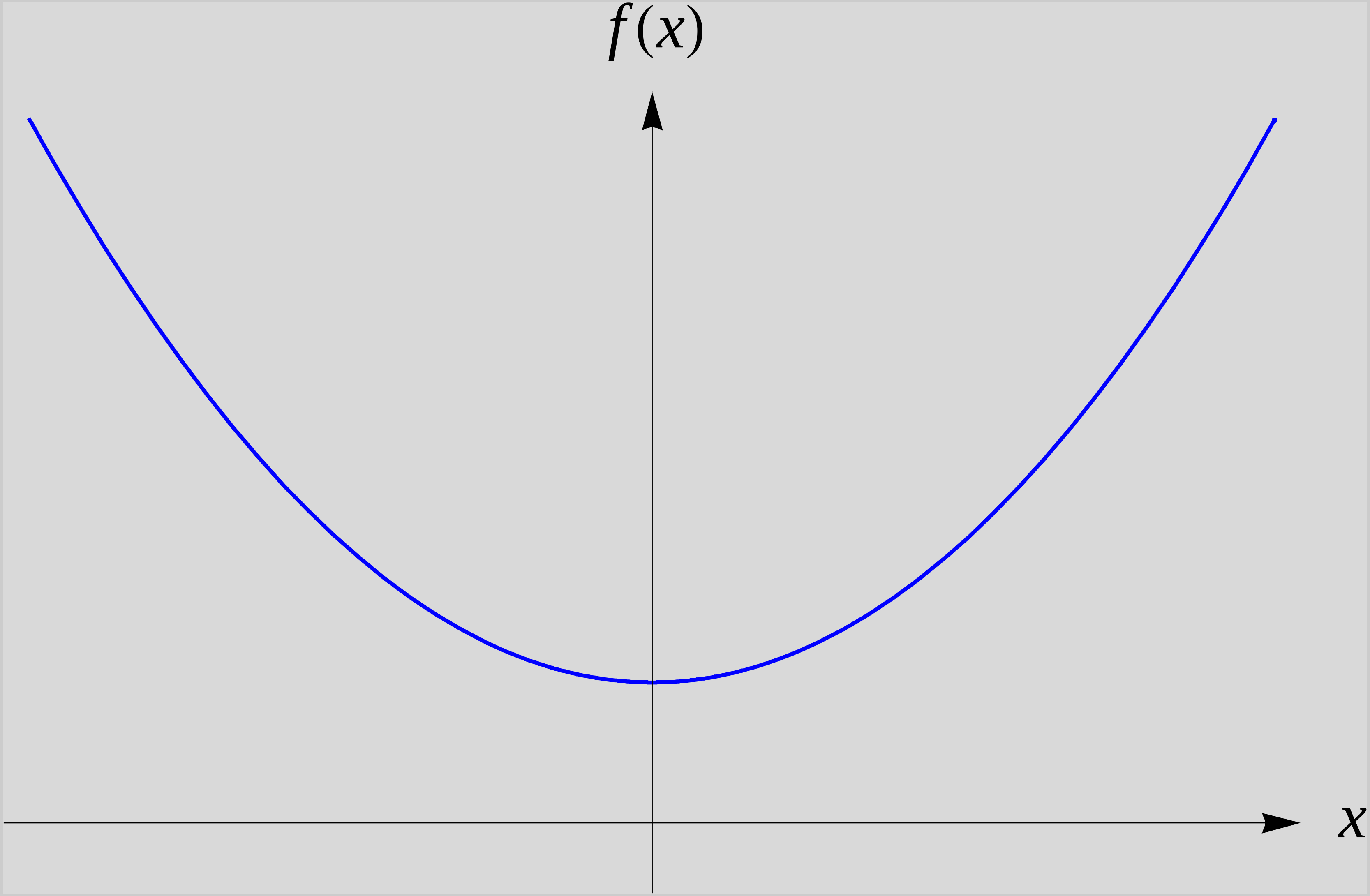

Figura 1: convessità

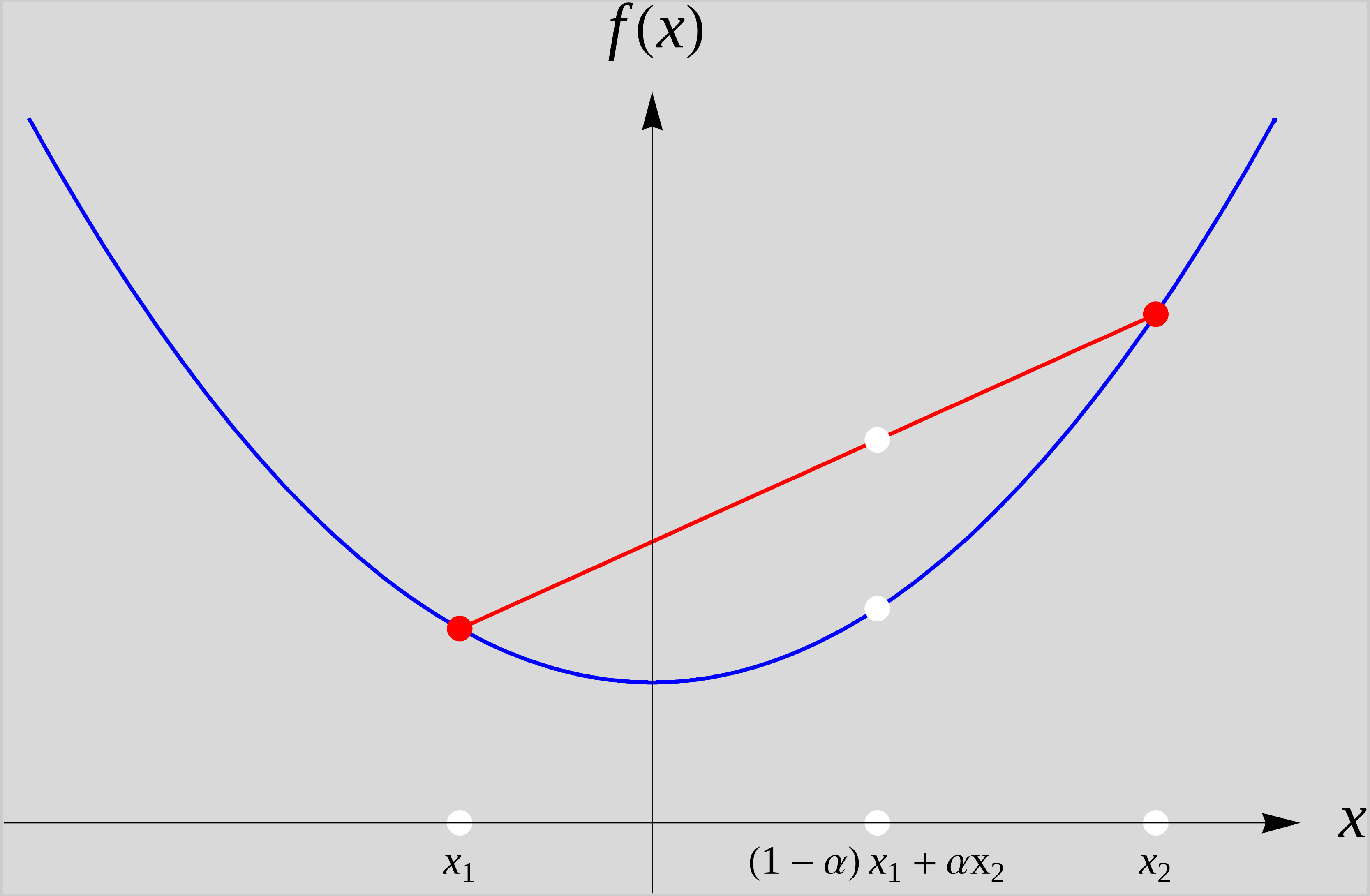

Figura 2: convessità

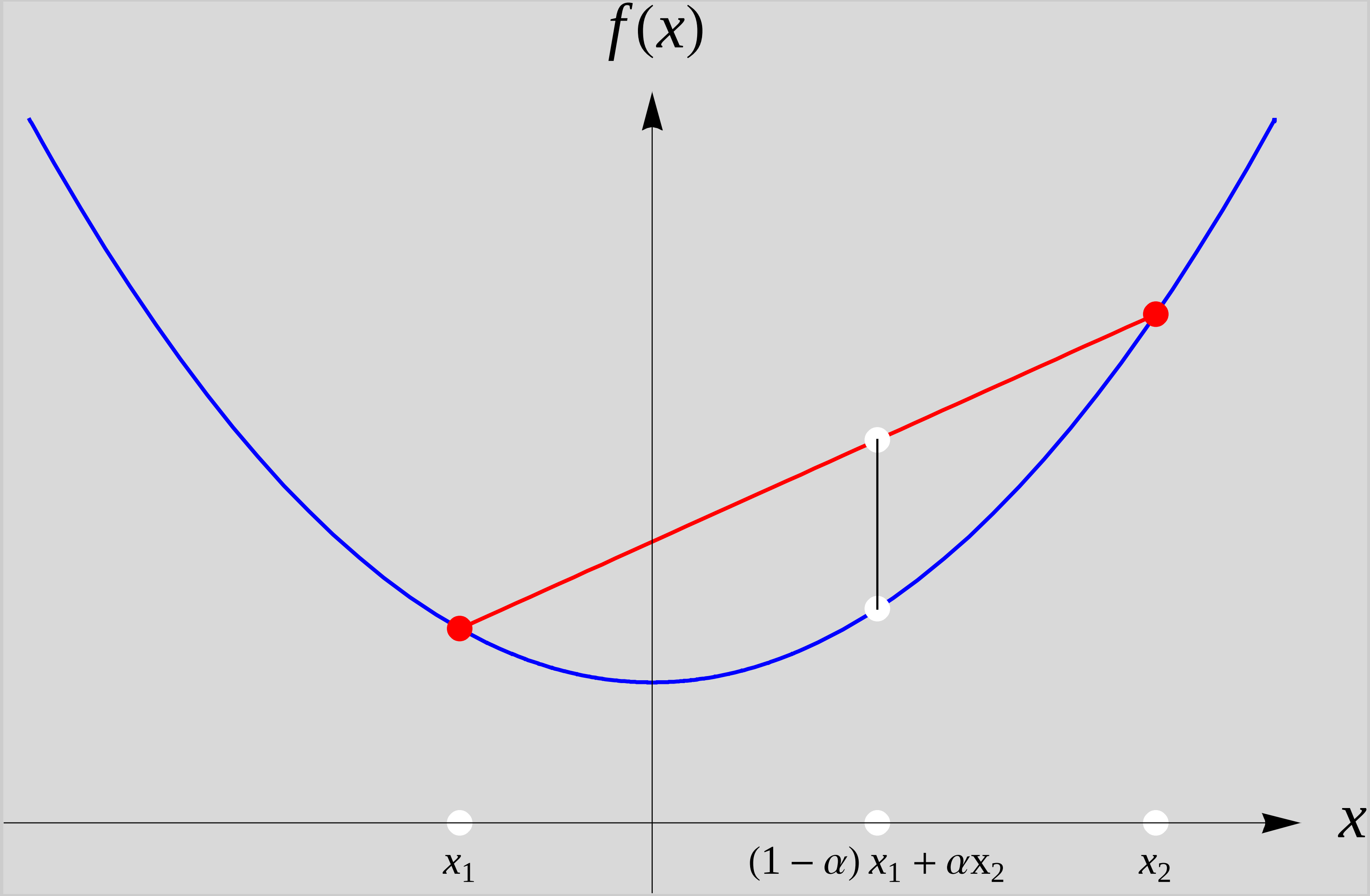

Figura 3: convessità

Le funzioni concave **ribaltano** questa proprietà, il grafico giace al di sopra della corda.

Le funzioni concave **ribaltano** questa proprietà, il grafico giace al di sopra della corda.

Una funzione $f(x)$ è concava se e solo se $-f(x)$ è convessa.

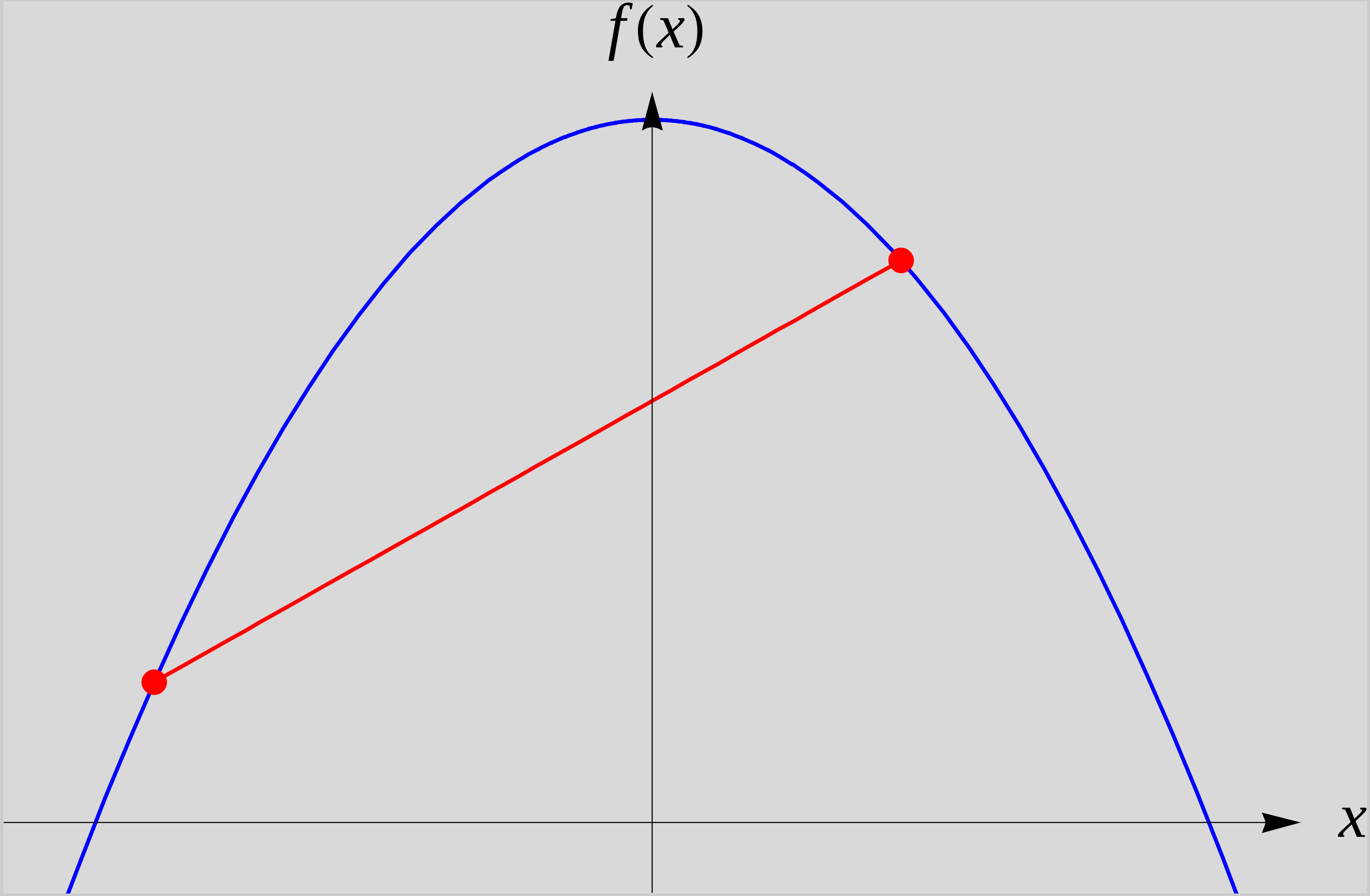

Figura 4: concavità

Derivate successive

Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è, definita nell'intervallo I e derivabile per ogni $x \in I$,

Derivate successive

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è, definita nell'intervallo I e derivabile per ogni $x \in I$, diremo che la funzione è dotata di derivata seconda in $x_0 \in I$

Derivate successive

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è, definita nell'intervallo I e derivabile per ogni $x \in I$, diremo che la funzione è dotata di derivata seconda in $x_0 \in I$ se risulta derivabile in x_0 la funzione derivata f'.

Derivate successive

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è, definita nell'intervallo I e derivabile per ogni $x \in I$, diremo che la funzione è dotata di derivata seconda in $x_0 \in I$ se risulta derivabile in x_0 la funzione derivata f'. f è dotata di derivata seconda se esiste finito:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}. \qquad (\mathrm{D}^2)$$

Derivate successive

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è, definita nell'intervallo I e derivabile per ogni $x \in I$, diremo che la funzione è dotata di derivata seconda in $x_0 \in I$ se risulta derivabile in x_0 la funzione derivata f'. f è dotata di derivata seconda se esiste finito:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}. \tag{D^2}$$

In pratica è sufficiente derivare la derivata prima

Se $f(x) = x^2$ si ha:

Se $f(x) = x^2$ si ha:

$$f'(x) = 2x$$

Se $f(x) = x^2$ si ha:

$$f'(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = 2.$$

Se $f(x) = \sin x$:

Se $f(x) = \sin x$:

$$f'(x) = \cos x$$

Se $f(x) = \sin x$:

$$f'(x) = \cos x \qquad \Longrightarrow \qquad f''(x) = -\sin x.$$

È possibile continuare nel processo di derivazione e considerare derivate terze, quarte...

È possibile continuare nel processo di derivazione e considerare derivate terze, quarte...

$$f'(x_0),\ f''(x_0),\ f^{(3)}(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$$

Teorema La funzione $f : I \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(I)$,

Teorema La funzione $f : I \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(I)$, cioè con derivate prima e seconda continue

Teorema La funzione $f : I \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(I)$, cioè con derivate prima e seconda continue è strettamente convessa se e solo se risulta

$$f^{(2)}(x) > 0 \, \forall x \in I$$

Teorema La funzione $f : I \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(I)$, cioè con derivate prima e seconda continue è strettamente convessa se e solo se risulta

$$f^{(2)}(x) > 0 \, \forall x \in I$$

Ad esempio sono strettamente convesse:

Teorema La funzione $f : I \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(I)$, cioè con derivate prima e seconda continue è strettamente convessa se e solo se risulta

$$f^{(2)}(x) > 0 \, \forall x \in I$$

Ad esempio sono strettamente convesse:

le parabole di equazione cartesiana $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$

Teorema La funzione $f : I \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(I)$, cioè con derivate prima e seconda continue è strettamente convessa se e solo se risulta

$$f^{(2)}(x) > 0 \, \forall x \in I$$

Ad esempio sono strettamente convesse:

le parabole di equazione cartesiana $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$

le funzioni funzioni esponenziali $y = a^x$ con base $a > 1$.

Assegnata la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ può accadere che esistano uno o più punti di I in cui la convessità cambi.

Assegnata la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ può accadere che esistano uno o più punti di I in cui la convessità cambi. Tali punti vengono denominati **punti di flesso**

Definizione Diremo che la funzione $f(x)$ ha un punto di *flesso* in x_0 se esiste un intorno completo $I(x_0)$ di x_0 tale per cui:

Definizione Diremo che la funzione $f(x)$ ha un punto di *flesso* in x_0 se esiste un intorno completo $I(x_0)$ di x_0 tale per cui:

- $f(x)$ è strettamente convessa se $x < x_0$ e strettamente concava se $x > x_0$,

Definizione Diremo che la funzione $f(x)$ ha un punto di *flesso* in x_0 se esiste un intorno completo $I(x_0)$ di x_0 tale per cui:

- $f(x)$ è strettamente convessa se $x < x_0$ e strettamente concava se $x > x_0$,
- $f(x)$ è strettamente concava se $x < x_0$ e strettamente convessa se $x > x_0$.

Definizione Diremo che la funzione $f(x)$ ha un punto di *flesso* in x_0 se esiste un intorno completo $I(x_0)$ di x_0 tale per cui:

- $f(x)$ è strettamente convessa se $x < x_0$ e strettamente concava se $x > x_0$,
- $f(x)$ è strettamente concava se $x < x_0$ e strettamente convessa se $x > x_0$.

Nel primo caso si parla di flesso **discendente**

Definizione Diremo che la funzione $f(x)$ ha un punto di *flesso* in x_0 se esiste un intorno completo $I(x_0)$ di x_0 tale per cui:

- $f(x)$ è strettamente convessa se $x < x_0$ e strettamente concava se $x > x_0$,
- $f(x)$ è strettamente concava se $x < x_0$ e strettamente convessa se $x > x_0$.

Nel primo caso si parla di flesso **discendente**

Nel secondo caso si parla di flesso **ascendente**

$f(x) = x\, e^x$ ha un **flesso ascendente** in $x_0 = -2$:

$f(x) = x\,e^x$ ha un **flesso ascendente** in $x_0 = -2$:

$$f''(x) = (x+2)\,e^x$$

$f(x) = x\,e^x$ ha un **flesso ascendente** in $x_0 = -2$:

$$f''(x) = (x+2)\,e^x$$

$$x < -2 \implies f''(x) < 0$$

$f(x) = x\, e^x$ ha un **flesso ascendente** in $x_0 = -2$:

$$f''(x) = (x+2)\, e^x$$

$$x < -2 \implies f''(x) < 0$$

$$x > -2 \implies f''(x) > 0$$

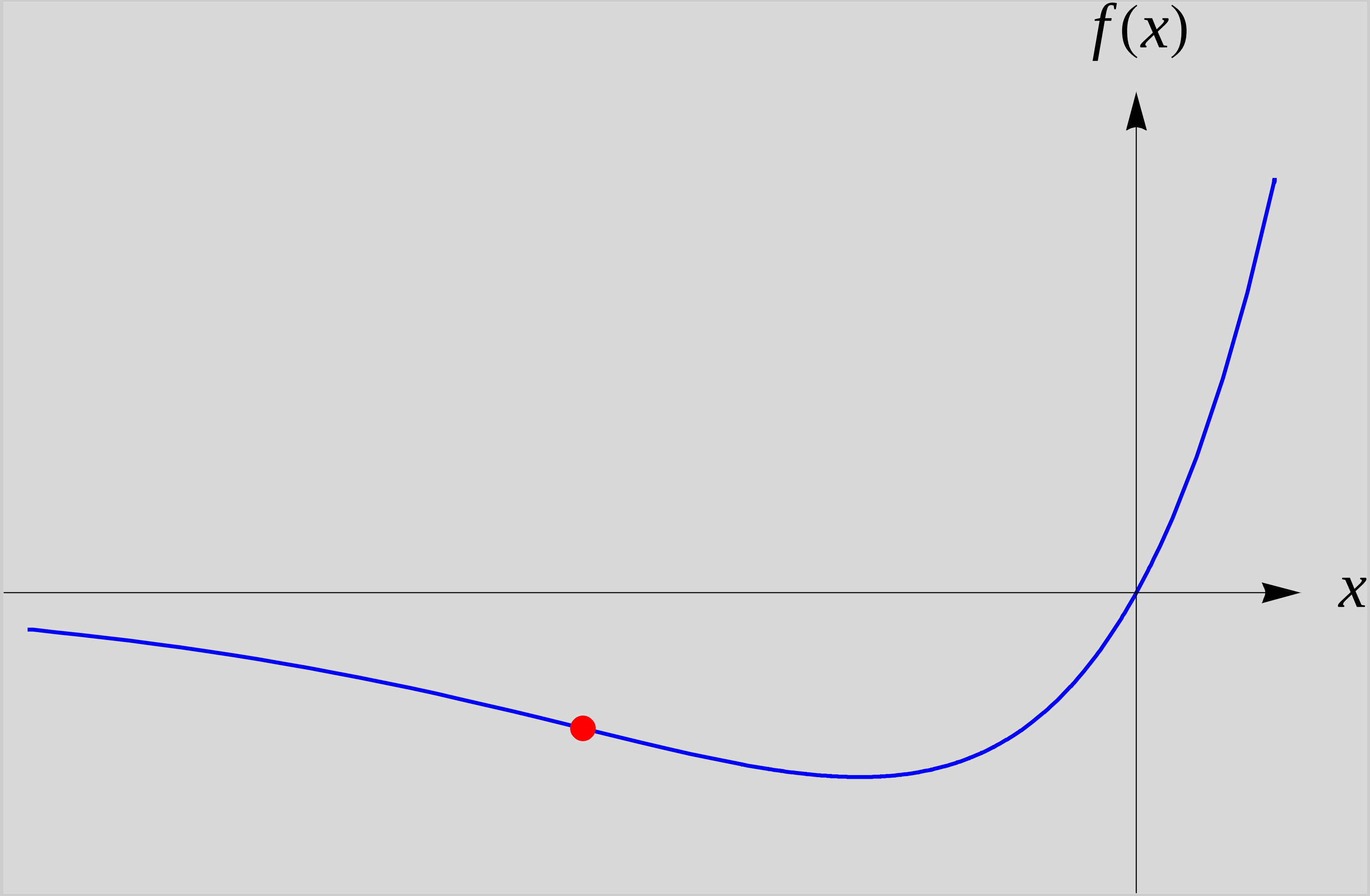

Figura 5: flesso ascendente

$f(x) = -x\,e^{-x}$ ha un **flesso discendente** in $x_0 = 2$:

$f(x) = -x\,e^{-x}$ ha un **flesso discendente** in $x_0 = 2$:

$$f''(x) = -(x-2)\,e^{-x}$$

$f(x) = -x\, e^{-x}$ ha un **flesso discendente** in $x_0 = 2$:

$$f''(x) = -(x-2)\, e^{-x}$$

$$x < 2 \implies f''(x) > 0$$

$f(x) = -x\,e^{-x}$ ha un **flesso discendente** in $x_0 = 2$:

$$f''(x) = -(x-2)\,e^{-x}$$

$$x < 2 \implies f''(x) > 0$$

$$x > 2 \implies f''(x) < 0$$

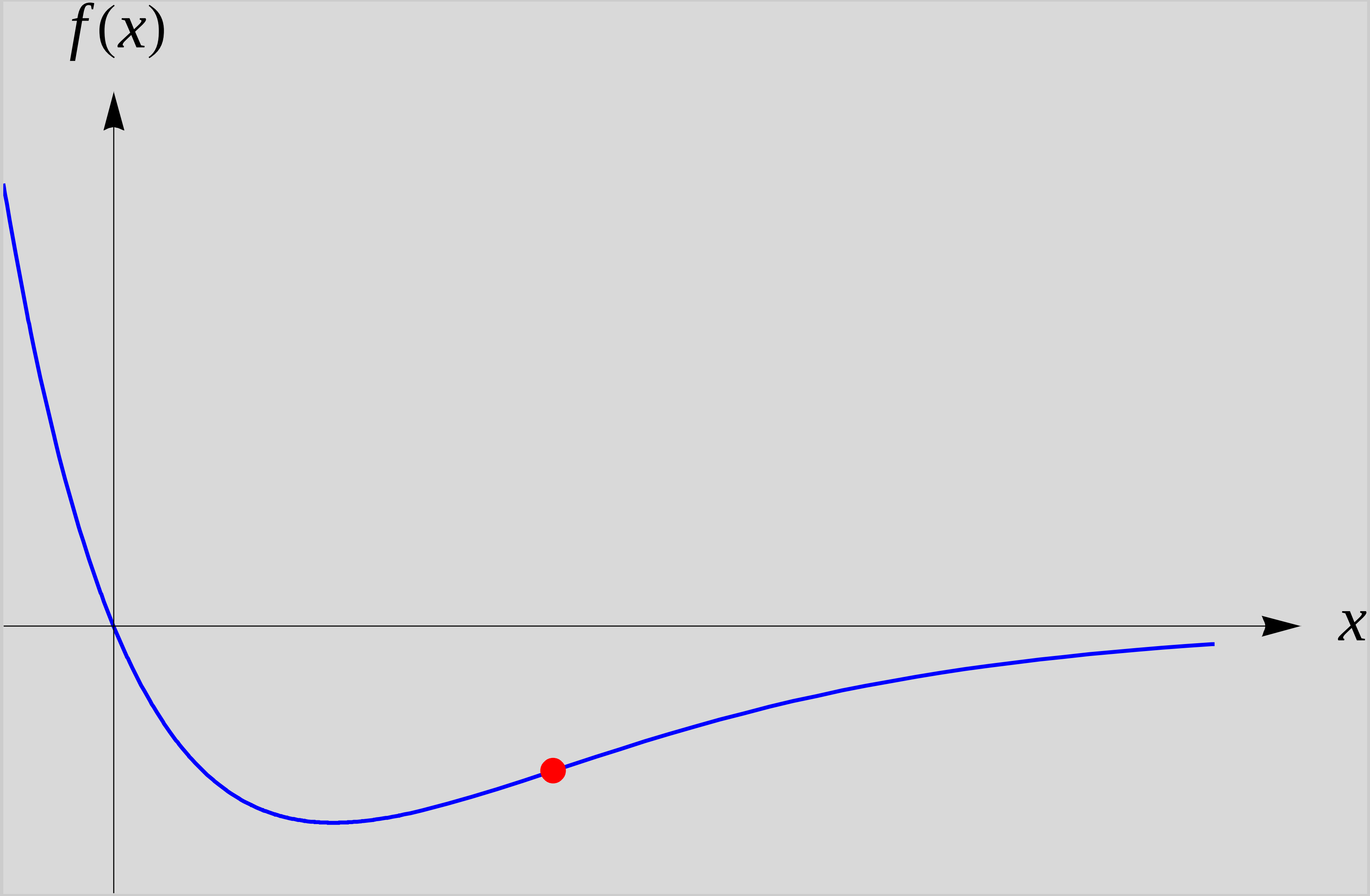

Figura 6: flesso discendente

Teorema Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

Teorema Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f è strettamente convessa

Teorema Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f è strettamente convessa
- $f(x) > f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0)$ per ogni $x,\, x_0 \in I$

Teorema Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f è strettamente convessa
- $f(x) > f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0)$ per ogni $x,\ x_0 \in I$

allora se f è convessa il suo grafico è sempre al di sopra delle rette tangenti

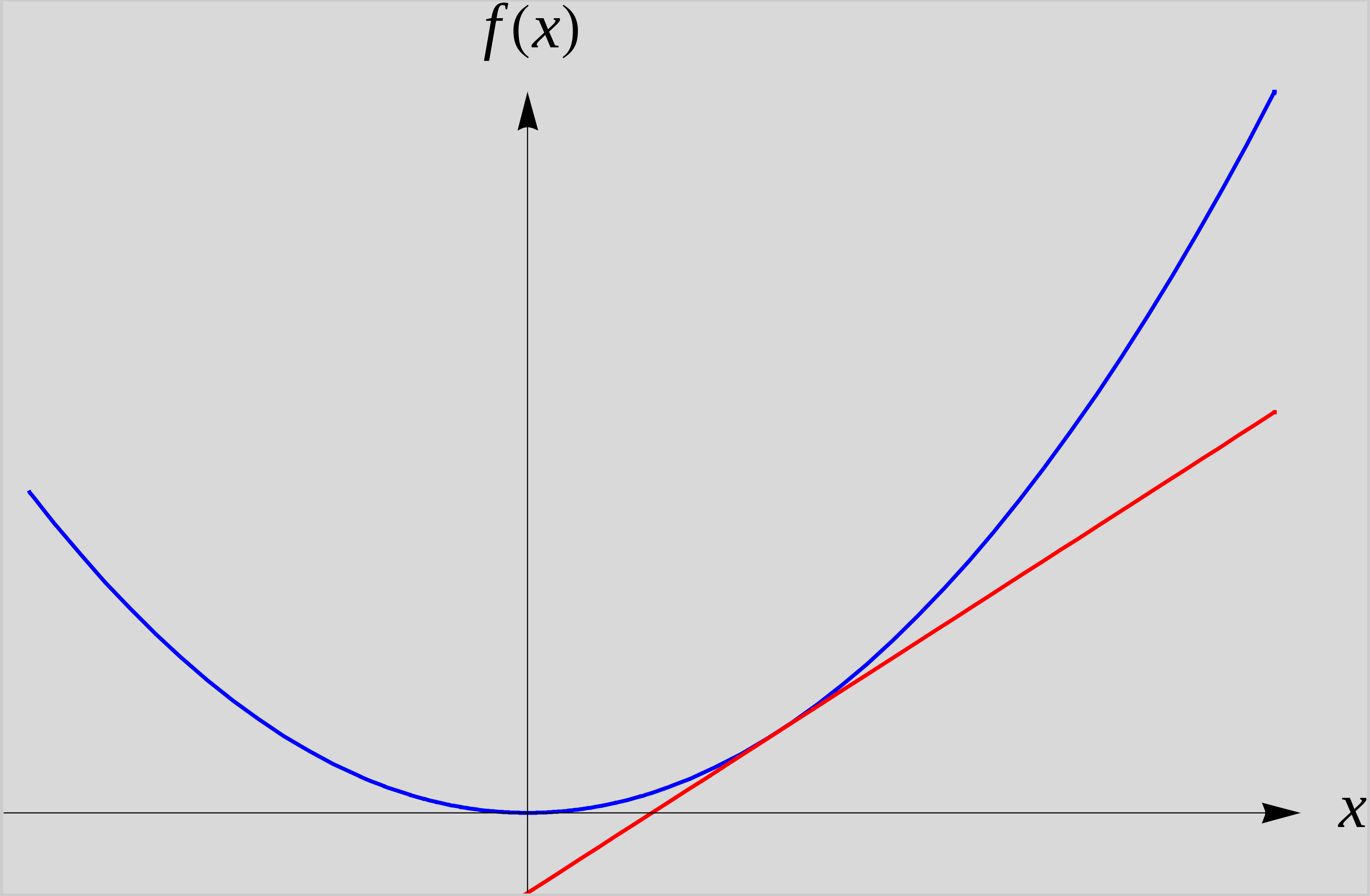

Figura 7: tangenza e convessità

Corollario Sia f strettamente convessa e derivabile.

Corollario Sia f strettamente convessa e derivabile.

Se $x_0 \in I$ è un punto critico, allora:

Corollario Sia f strettamente convessa e derivabile.

Se $x_0 \in I$ è un punto critico, allora:

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x).$$

Corollario Sia f strettamente convessa e derivabile.

Se $x_0 \in I$ è un punto critico, allora:

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x).$$

Dimostrazione: Per ogni $x \in I$ si ha:

Corollario Sia f strettamente convessa e derivabile.

Se $x_0 \in I$ è un punto critico, allora:

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x).$$

Dimostrazione: Per ogni $x \in I$ si ha:

$$f(x) > f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) = f(x_0)$$

Teorema Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$ e sia $x_0 \in]a,b[$. Allora:

Teorema Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$ e sia $x_0\in\,]a,b[\,$. Allora:

- $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ è minimo locale

Teorema Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$ e sia $x_0 \in \,]a, b[\,$. Allora:

- $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è minimo locale
- $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è massimo locale

Questo esempio interessa la gestione delle scorte.

Questo esempio interessa la gestione delle scorte.

Siano a, $b > 0$ Consideriamo la funzione:

$$c(x) = a\,x + \frac{b}{x},\ x > 0$$

Questo esempio interessa la gestione delle scorte.

Siano $a,\ b > 0$ Consideriamo la funzione:

$$c(x) = a\,x + \frac{b}{x},\ x > 0$$

Dimostrare che $c(x)$ raggiunge il suo minimo assoluto in $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$

Questo esempio interessa la gestione delle scorte.

Siano a, $b > 0$ Consideriamo la funzione:

$$c(x) = a\,x + \frac{b}{x},\ x > 0$$

Dimostrare che $c(x)$ raggiunge il suo minimo assoluto in $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ e che il valore dell'estremo è $2\sqrt{ab}$

In primis osserviamo che

In primis osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} c(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} c(x) = \infty$$

In primis osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} c(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} c(x) = \infty$$

Poi:

$$c'(x) = \frac{a\,x^2 - b}{x^2} \Rightarrow c'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}} := x_\pm$$

In primis osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} c(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} c(x) = \infty$$

Poi:

$$c'(x) = \frac{a\,x^2 - b}{x^2} \Rightarrow c'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}} := x_\pm$$

e ancora

$$c''(x) \;=\; \frac{2b}{x^3} \Rightarrow c''(x_+) > 0 \vee c''(x_-) < 0$$

In primis osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} c(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} c(x) = \infty$$

Poi:

$$c'(x) = \frac{a\,x^2 - b}{x^2} \Rightarrow c'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}} := x_\pm$$

e ancora

$$c''(x) \; = \; \frac{2b}{x^3} \Rightarrow c''(x_+) > 0 \vee c''(x_-) < 0$$

Dunque $x_+ = \sqrt{\frac{b}{a}}$ è punto di **minimo** per $c(x)$

In primis osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} c(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} c(x) = \infty$$

Poi:

$$c'(x) = \frac{a\,x^2 - b}{x^2} \Rightarrow c'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}} := x_\pm$$

e ancora

$$c''(x) \;=\; \frac{2b}{x^3} \Rightarrow c''(x_+) > 0 \vee c''(x_-) < 0$$

Dunque $x_+ = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ è punto di **minimo** per $c(x)$

relativo o assoluto?

In questo specifico caso è **assoluto** in quanto si era preliminarmente visto che:

In questo specifico caso è **assoluto** in quanto si era preliminarmente visto che:

$$\lim_{x\to 0^+} c(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} c(x) = \infty$$

In questo specifico caso è **assoluto** in quanto si era preliminarmente visto che:

$$\lim_{x \to 0^+} c(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} c(x) = \infty$$

Quindi abbiamo provato che per ogni $x > 0$ vale:

In questo specifico caso è **assoluto** in quanto si era preliminarmente visto che:

$$\lim_{x \to 0^+} c(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} c(x) = \infty$$

Quindi abbiamo provato che per ogni $x > 0$ vale:

$$c(x) = a\,x + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{a\,b} = c(x_+)$$

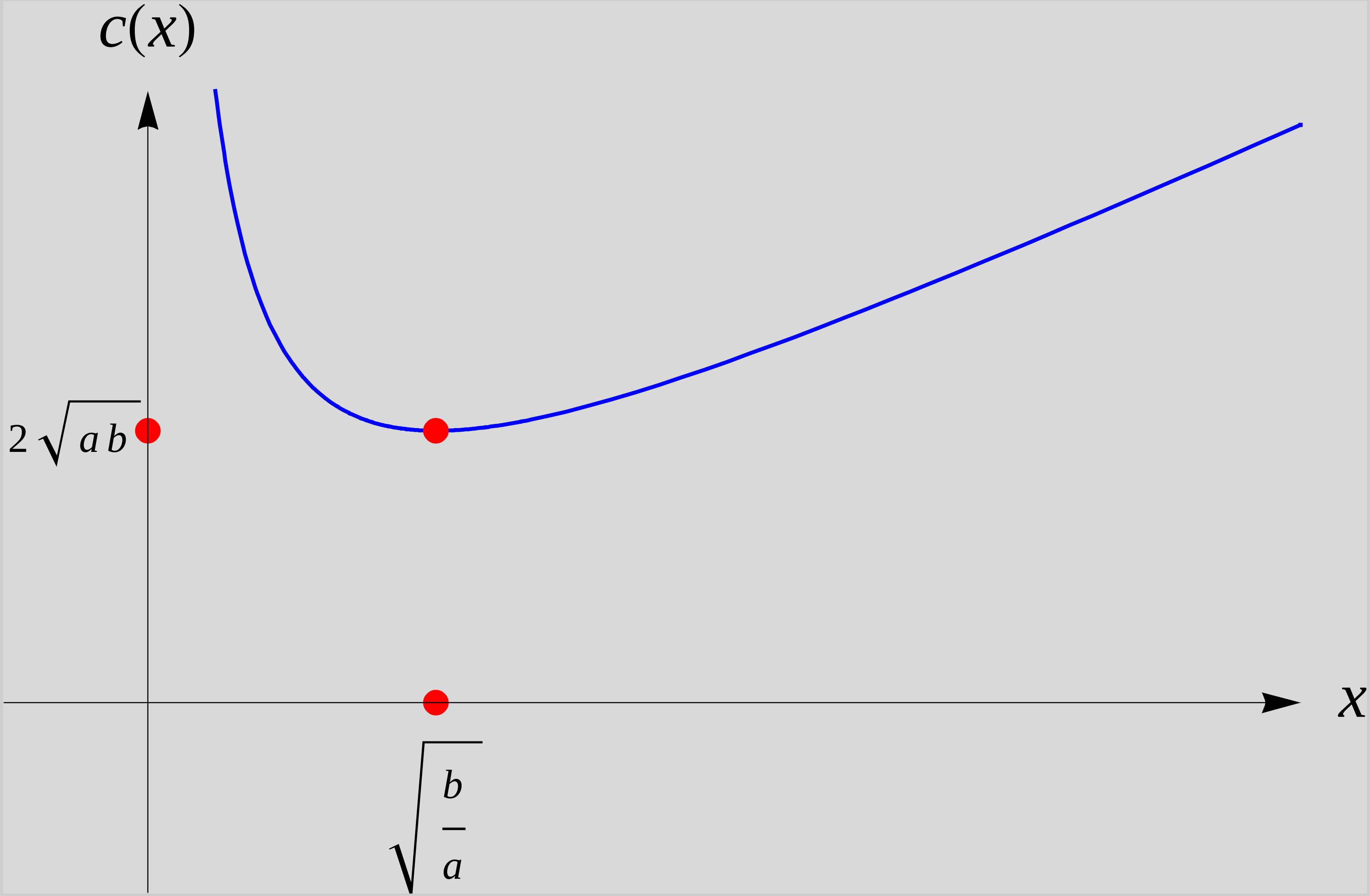

Figura 8: $c(x)$